შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8

04.05.2014/ მათ/IV/ M455

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

ვთქვათ, $P(x)=a_nx^n+\dots+a_0 \Rightarrow P(16)=a_n(2^4)^n+\dots+a_0=(3^4)^{503}$

$3^4\equiv 81\equiv 80+1\equiv 1 \pmod{2^4} \Leftrightarrow$ ~~[illegible]~~ $\Leftrightarrow (3^4)^{503}\equiv 1 \pmod{2^4=16}$

ფერმას თეორემა $(3^4)^{502}\equiv 1 \pmod{503\in\mathbb{P}}$

$P(16)=3^{2012}\equiv 1 \pmod{16} \Rightarrow a_0\equiv 1 \pmod{16}$. თუ ვივარაუდებთ, რომ 3^{2012} შეიძლება იყოს Q-ს ფესვი, მაშინ Q უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას: $3^{2012}=\frac{p(\in\mathbb{Z})}{q(\in\mathbb{N})}$ $(p,q)=1 \Rightarrow$ $p\mid b_0$ და $q\mid b_n$, სადაც b_0 და b_1, Q პოლინომის ბოლო და პირველი კოეფიციენტებია. $\Rightarrow p\geq 3^{2012}$

ავიღოთ დამხმარე პოლინომი $S(x)=P(x)-3^{2012}=a_nx^n+\dots+a_1x+c$; $c=a_0-3^{2012}$

$a_0\equiv 1\equiv 3^{2012} \pmod{16} \Rightarrow a_0-3^{2012}\equiv 0 \pmod{16} \Rightarrow c\equiv 0 \pmod{16}$ ~~[illegible]~~

$S(16)=0=a_n16^n+\dots+a_1\cdot 16+c \Rightarrow a_n16^{n-1}+\dots+a_1+\frac{c}{16}=0$

$S(16)=a_n16^n+\dots+a_1\cdot 16+c$

$S(3^{2012})=$ ~~a_n3^{2012}~~ $a_n(3^4)^{503n}+\dots+a_1(3^4)^{503}-(3^4)^{503}+a_0$

$Q(3^{2012})\equiv\sum_{i=0}^{n}a_i \pmod{16}$. დავუშვათ და ვაჩვენოთ, რომ $Q(3^{2012})=0$

თუ $Q(3^{2012})=0$, $Q(x)$ ბეზუ-ბლოის წინადადებით, რომელიც $(x-3^{2012})R(x)$, სადაც $R(x)$ მთელკოეფიციენტებიანი $(n-1)$ ხარისხის პოლინომია:

$R(x)=b_nx^{n-1}+\alpha_1x^{n-2}+\dots+\beta$

მოვიძიებთ $\min\{Q(P(16))\}$

ვთქვათ $\min\{Q(3^{2012})\}=\Delta$ მაშინ თუ ავიღებთ დამხმარე ფუნქციას (მთელკოეფიციენტებიან პოლინომს) $T(x)$,: $T(x)=Q(x)-\Delta$, მაშინ $T(3^{2012})=0$

$T(x)=b_nx^n+\dots+b_1x+b_0-\Delta$, სადაც $b_i=a_{\pi(i)}$. უნდა ვიპოვოთ უმცირესი შესაძლო $|\Delta|$